Apellido y Nombres: ....,,,,,...
DNI: .... Padrón: .... Código Asignatura: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....
Correo electrónico: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Primera fecha. 11 de septiembre de 2020.

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 3 (tres) ejercicios

Ejercicio 1. Sabiendo que f admite el siguiente desarrollo de Laurent:

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}(-2z)^k+\sum_{k=0}^{\infty}(z/2)^k,$$

decidir, argumentando la respuesta con claridad, si la afirmación $\operatorname{Res}[f,0]=-\frac{1}{2}$, es $i)$ verdadera, $ii)$ falsa o $iii)$ no se puede determinar su valor de verdad.

Ejercicio 2. Sea

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & \text{si} \quad x\in[0,1/2) \\ x+bx^3 & \text{si} \quad x\in[1/2,1] \end{cases}$$

Determinar todos los valores de a y b para los cuales la serie trigonométrica de Fourier de f en $[0,1]$ coincida con f en todo punto de $[0,1]$ salvo exactamente en un punto. Indicar cuál es ese punto y dar el valor de la serie en el mismo.

Ejercicio 3. Considerar el problema del potencial electrostático en la banda infinita:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & -\infty<x<+\infty, \quad 0<y<1 \\ u(x,0)=f_1(x) & -\infty<x<+\infty \\ u(x,1)=f_2(x) & -\infty<x<+\infty \end{cases}$$

Explicar el procedimeinto de resolución para cada uno de los siguientes casos:
a) $f_1(x)=\alpha$ para todo x, $f_2(x)=\beta$ si $x\leqslant 0$ y $f_2(x)=\gamma$ si $x>0$ (α,β y γ constantes),
b) f_1 y f_2 son absolutamente integrables.
Eligir uno de los dos casos y resolverlo.

Ejercicio 4. Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x+x^3}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}e^{-|x|}\,dx$$

y obtener el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x\,\cos(\alpha x)}{x}\,dx$ para todo α.

Ejercicio 5. Hallar $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(t)+\int_0^t f(\tau)\,d\tau=H(t)-H(t-1) \quad \forall t\geqslant 0$$

señalando claramente las propiedades que utiliza e indicando las hipótesis bajo las cuales son válidas.

RESOLUCIÓN INTEGRADOR ANÁLISIS MATEMÁTICO III

Primer Cuatrimestre 2020 - Primera oportunidad - 11/09/2020

Ad usum delfinorum

EJERCICIO 1: Sabiendo que *f* admite el desarrollo de Laurent

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}(-2z)^k+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k \ ,$$

decidir, argumentando la respuesta con claridad, si la afirmación « $RES[f,0]=-\frac{1}{2}$ » es: *i*) verdadera, *ii*) falsa o *iii*) no se puede determinar su valor de verdad.

Resolución: El desarrollo dado en el enunciado es el de la función $f(z)=\dfrac{-1}{2z+1}+\dfrac{2}{2-z}$ en la corona $D(0;\frac{1}{2},2)=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<|z|<2\right\}$. Puesto que no hay más información sobre *f*, no se puede determinar su valor de verdad: si $f(z)=\dfrac{2z}{2z+1}+\dfrac{2}{2-z}$ para todo $z\in\mathbb{C}-\left\{-\frac{1}{2},2\right\}$, entonces *f* es holomorfa en 0 y por lo tanto m $RES[f,0]=0$ (la afirmación sería falsa); si *f* está definida solamente en la corona $D(0;\frac{1}{2},2)=\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<|z|<2\right\}$, 0 no es singularidad aislada de *f* ; si f estuviera definida en $\left\{z\in\mathbb{C}:0<|z|<\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{z\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<|z|<2\right\}$ de la siguiente manera

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{2z}{2z+1}+\dfrac{2}{2-z} & si \quad \frac{1}{2}<|z|<2\\[2ex] -\dfrac{1}{2z} & si \quad 0<|z|<\frac{1}{2}\end{cases}$$

entonces 0 es un polo simple de *f* con residuo $-\dfrac{1}{2}$ y la afirmación sería verdadera. Estos son solamente algunos ejemplos que indican que no se puede decidir el valor de verdad de la afirmación con los datos del enunciado.

Respuesta: *iii*) no se puede determinar su valor de verdad.

Verificación: La serie $\sum_{k=-\infty}^{-1}(-2z)^k=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{-2z}\right)^n$ converge sii $\left|\dfrac{1}{-2z}\right|<1$, es decir sii $|z|>\dfrac{1}{2}$ y en ese caso (se trata de una serie geométrica), es $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{-2z}\right)=\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{-2z}\right)}-1=\dfrac{-1}{2z+1}$.

Por otra parte, la serie $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k$ converge sii $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, es decir, sii $|z|<2$. En ese caso, (otra geométrica) es $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}$.

EJERCICIO 2: Sea $f(x)=\begin{cases} ax^2+1 & si \quad x\in[0,\frac{1}{2}) \\ x+bx^3 & si \quad x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$. Fijar valores de *a* y de *b* para que la serie trigonométrica de Fourier de *f* en $[0,1]$ coincida con *f* en todo punto de $[0,1]$ <u>salvo exactamente en un punto</u>. Indicar cuál es ese punto y dar el valor de la serie en el mismo.

Resolución: Cualesquiera sean los valores de *a* y de *b*, la función *f* es seccionalmente de clase C^1. Por lo tanto (condiciones de Dirichlet) su serie de Fourier converge puntualmente a *f* en todo punto de $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$. Se aconseja hacer un dibujito de la extensión 1-periódica de *f* para algún par de valores cualesquiera de *a* y de *b*. En 0 y en 1 la serie converge al promedio del salto

$$\frac{1}{2}[f(0-)+f(0+)] \overset{periodicidad}{=} \frac{1}{2}[f(1-)+f(0+)] = \frac{1}{2}[\overbrace{1+b}^{f(1-)}+\overbrace{1}^{f(0+)}] = 1+\frac{b}{2}.$$

En $\frac{1}{2}$ la serie de Fourier de *f* converge al promedio

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}-\right)+f\left(\frac{1}{2}+\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{4}+1+\frac{1}{2}+\frac{b}{8}\right] = \frac{12+2a+b}{16}$$

Ahora bien: $f(0)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{b}{8}$ y $f(1)=1+b$. Si quisiéramos que la serie de Fourier de *f* converja a *f* en todos los puntos de $[0,1]$, tendríamos que imponer las tres condiciones

$$(1)\quad 1=1+\frac{b}{2} \quad , \quad (2)\quad \frac{1}{2}+\frac{b}{8}=\frac{12+2a+b}{16} \quad \text{y} \quad (3)\quad 1+b=1+\frac{b}{2}$$

La primera y la tercera son equivalentes a la misma condición: $b = 0$. Con esto, la segunda queda $\frac{1}{2}=\frac{12+2a}{16}$, es decir: $a = -2$. Por lo tanto, si $b = 0$ y $a = -2$, la serie de Fourier de *f* converge a *f* en todos los puntos de $[0,1]$. Si $b=0$ y $a\neq -2$, la serie de Fourier de *f* converge a *f* en todos los puntos de $[0,1]$ excepto en $\frac{1}{2}$. Por otra parte, si

$b \neq 0$, no se cumple ninguna de las condiciones (1) y (3) y por lo tanto la serie de Fourier de *f* no converge a *f* en los puntos 0 y 1. Por lo tanto:

Respuesta: $b = 0$ y $a \neq -2$, el único punto donde la serie no converge al valor de *f* es $\frac{1}{2}$, en este punto la serie converge a $\frac{12+2a}{16} = \frac{6+a}{8} \neq \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

EJERCICIO 3: Considerar el problema del potencial electrostático en la banda infinita:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y^2} = 0 & -\infty < x < +\infty \quad , \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = f_1(x) & -\infty < x < +\infty \\ u(x,1) = f_2(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

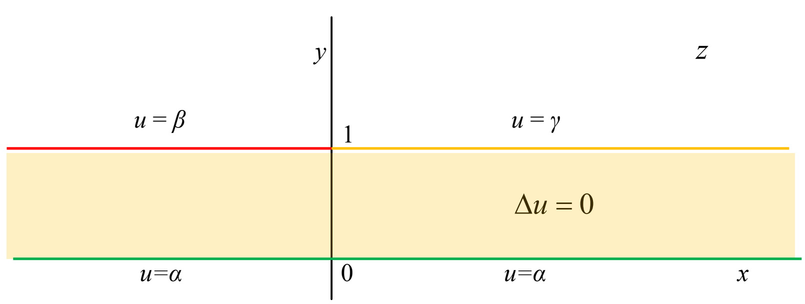
Explicar el procedimiento de resolución para cada uno de los siguientes casos:

(***a***) $f_1(x) = \alpha$ para todo *x* y $f_2(x) = \begin{cases} \beta & si\ x \leq 0 \\ \gamma & si\ x > 0 \end{cases}$ $(\alpha, \beta, \gamma$: constantes)

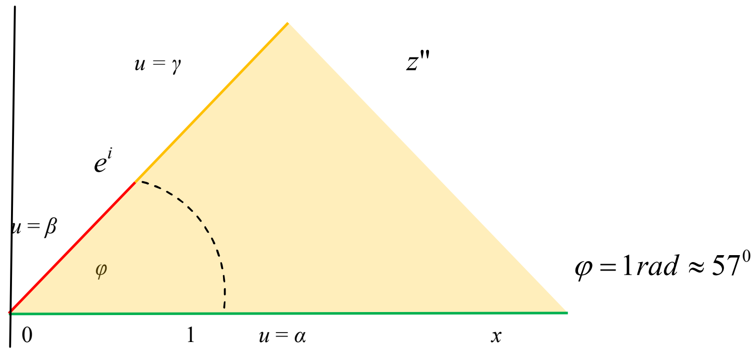
(***b***) f_1 y f_2 absolutamente integrables (en la recta)

Elegir uno de los casos y resolverlo.

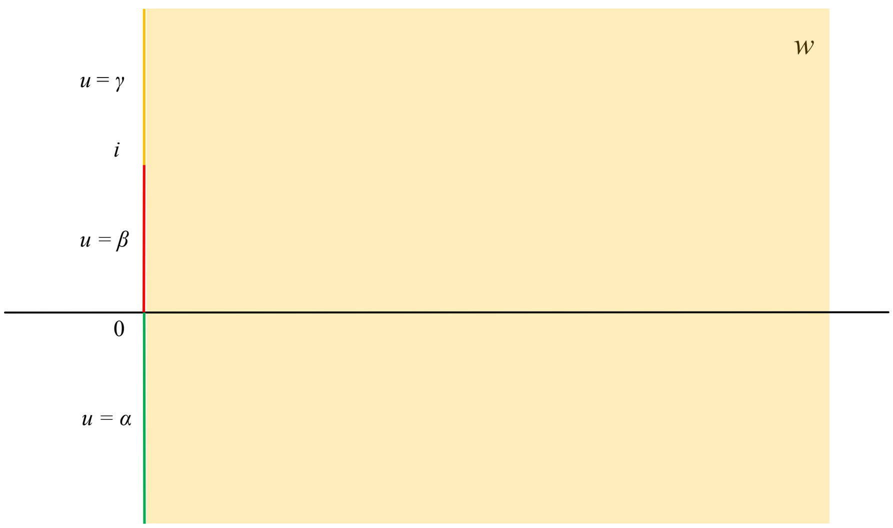
Resolución (*a*) Transformamos la banda en el semiplano $\{w \in \mathbb{C} : \text{Re}(w) > 0\}$, en el cual se verifica $Arg(w) = artg\left(\frac{\text{Im}(w)}{\text{Re}(w)}\right)$:



$z \mapsto z'' = \exp(z)$



$z'' \mapsto w = -iz''^{\pi} = -ie^{\pi\, Log(z'')}$



Planteamos $u = c_1 Arg(w-i) + c_2 Arg(w) + c_3$ y las condiciones de contorno siguientes:

(1) $c_1\frac{\pi}{2} + c_2\frac{\pi}{2} + c_3 = \gamma$

(2) $-c_1\frac{\pi}{2} + c_2\frac{\pi}{2} + c_3 = \beta$

(3) $-c_1\frac{\pi}{2} - c_2\frac{\pi}{2} + c_3 = \alpha$

Sumando (1) + (3) : $c_3 = \frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$. Restando (1) - (2): $c_1 = \frac{1}{\pi}(\gamma-\beta)$. Restando (2) - (3): $c_2 = \frac{1}{\pi}(\beta-\alpha)$. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\gamma-\beta}{\pi} Arg(w-i) + \frac{\beta-\alpha}{\pi} Arg(w) + \frac{\alpha+\gamma}{2} = \\
&= \frac{\gamma-\beta}{\pi} Arg(-ie^{\pi z}-i) + \frac{\beta-\alpha}{\pi} Arg(-ie^{\pi z}) + \frac{\alpha+\gamma}{2} \\
&= \frac{\gamma-\beta}{\pi} artg\left(-\frac{1+e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x} sen(\pi y)}\right) + \frac{\beta-\alpha}{\pi} artg\left(-\frac{\cos(\pi y)}{sen(\pi y)}\right) + \frac{\alpha+\gamma}{2} \\
&= \frac{\beta-\gamma}{\pi} artg\left(\frac{1+e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x} sen(\pi y)}\right) + \frac{\beta-\alpha}{\pi}\left(\pi y - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\alpha+\gamma}{2} = \\
&= \frac{\beta-\gamma}{\pi} artg\left(\frac{1+e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x} sen(\pi y)}\right) + (\beta-\alpha)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha+\gamma}{2}
\end{aligned}
$$

Es decir:

$$
u(x,y) = \frac{\beta-\gamma}{\pi} artg\left(\frac{1+e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x} sen(\pi y)}\right) + (\beta-\alpha)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha+\gamma}{2}
$$

Verificaciones: para comprobar que esta función es, efectivamente armónica, basta verificar que $v(x,y) = artg\left(\frac{1+e^{\pi x}\cos(\pi y)}{e^{\pi x} sen(\pi y)}\right)$ es armónica, pues los términos restantes son lineales o constantes. Pero v es la parte imaginaria de $Log(w-i) = Log(-i(1+e^{\pi z}))$ donde Log es el logaritmo principal. Observe que, efectivamente, la parte real de $-i(1+e^{\pi z})$ es $e^{\pi x} sen(\pi y) > 0$ cuando $0 < y < 1$. Ahora, veamos las condiciones de contorno:

(1) Para $y \longrightarrow 0+$: $u \longrightarrow \frac{\beta-\gamma}{\pi} \overbrace{artg(+\infty)}^{=\frac{\pi}{2}} - \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2} = \alpha$

(2) Para $x < 0$ e $y \longrightarrow 1-$, $1+e^{\pi x}\cos(\pi y) \longrightarrow 1-e^{\pi x} > 0$, pues $x < 0$. Entonces, en este caso: $u \longrightarrow \frac{\beta-\gamma}{\pi} \overbrace{artg(+\infty)}^{=\frac{\pi}{2}} + \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2} = \beta$

(3) Para $x > 0$ e $y \longrightarrow 1-$, $1+e^{\pi x}\cos(\pi y) \longrightarrow 1-e^{\pi x} < 0$, pues $x > 0$. Entonces, en este caso: $u \longrightarrow \frac{\beta-\gamma}{\pi} \overbrace{artg(-\infty)}^{=-\frac{\pi}{2}} + \frac{\beta-\alpha}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2} = \gamma$

Resolución (***b***): Buscamos una función $u(x,y)$ tan maravillosa que permite las siguientes operaciones:

$$\hat{u}(\omega,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,y)e^{-i\omega x}dx \quad , \quad u(x,y)=\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(\omega,y)e^{i\omega x}d\omega \quad ,$$

$$\widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}(\omega,y)=-\omega^2\hat{u}(\omega,y)\,, \qquad \widehat{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}(\omega,y)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\omega,y)\,,$$

Aplicando la transformación de Fourier a la ecuación de Laplace:

$$-\omega^2\hat{u}(\omega,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(\omega,y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{u}(\omega,y)=A(\omega)e^{\omega y}+B(\omega)e^{-\omega y}$$

donde A y B son dos funciones a determinar por las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}&(a)\ \hat{u}(\omega,0)=A(\omega)+B(\omega)=\hat{f}_1(\omega)\\ &(b)\ \hat{u}(\omega,1)=A(\omega)e^{\omega}+B(\omega)e^{-\omega}=\hat{f}_2(\omega)\end{aligned} \qquad (*1)$$

Despejando (cuando $\omega\neq 0$): $A(\omega)=\dfrac{\hat{f}_2(\omega)-e^{-\omega}\hat{f}_1(\omega)}{e^{\omega}-e^{-\omega}}$ y $B(\omega)=\dfrac{e^{\omega}\hat{f}_1(\omega)-\hat{f}_2(\omega)}{e^{\omega}-e^{-\omega}}$, es decir:

$$\begin{aligned}&\hat{u}(\omega,y)=A(\omega)e^{\omega y}+B(\omega)e^{-\omega y}=\\ &=\frac{1}{e^{\omega}-e^{-\omega}}\left[\hat{f}_2(\omega)e^{\omega y}-e^{-\omega(1-y)}\hat{f}_1(\omega)+e^{\omega(1-y)}\hat{f}_1(\omega)-\hat{f}_2(\omega)e^{-\omega y}\right]=\\ &=\frac{1}{e^{\omega}-e^{-\omega}}\left[\hat{f}_2(\omega)(e^{\omega y}-e^{-\omega y})+\hat{f}_1(\omega)(e^{\omega(1-y)}-e^{-\omega(1-y)}\right]=\\ &=\frac{senh(\omega(1-y))}{sen(\omega)}\hat{f}_1(\omega)+\frac{senh(\omega y)}{senh(\omega)}\hat{f}_2(\omega)\end{aligned} \qquad (*2)$$

Observación 1: Si $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son continuas en el origen, el límite de $\hat{u}(\omega,y)$ cuando $\omega\longrightarrow 0$ es $(1-y)\hat{f}_1(0)+y\hat{f}_2(0)$. Para $y=0$ tenemos $\hat{f}_1(0)=\hat{u}(0,0)$ y para $y=1$, $\hat{f}_2(0)=\hat{u}(0,1)$ (son las condiciones de contorno transformadas). Por otra parte, tomando $\omega=0$ en (*1) tenemos $\hat{u}(0,0)=A(0)+B(0)=\hat{f}_1(0)$ y $\hat{u}(0,1)=A(0)+B(0)=\hat{f}_2(0)$, sistema compatible sii $\hat{f}_1(0)=\hat{f}_2(0)$. Resulta, en este caso, que $\underset{\omega\to 0}{Lim}\,\hat{u}(\omega,y)=(1-y)\hat{f}_1(0)+y\hat{f}_2(0)=\hat{f}_1(0)$ para todo y.

Observación 2: Estudiemos ahora el límite de $\hat{u}(\omega, y)$ cuando $\omega \longrightarrow +\infty$ y $\omega \longrightarrow -\infty$. Cuando $0 < y < 1$:

$$\frac{senh(\omega(1-y))}{sen(\omega)} = \frac{e^{\omega(1-y)} - e^{-\omega(1-y)}}{e^{\omega} - e^{-\omega}} = \frac{e^{\omega(1-y)}}{e^{\omega}} \cdot \frac{1-e^{-2\omega(1-y)}}{1-e^{-2\omega}} = e^{-\omega y}\frac{1-e^{-2\omega(1-y)}}{1-e^{-2\omega}} \xrightarrow[\omega\to+\infty]{} 0$$

y

$$\frac{senh(\omega(1-y))}{sen(\omega)} = \frac{e^{\omega(1-y)} - e^{-\omega(1-y)}}{e^{\omega} - e^{-\omega}} = \frac{e^{-\omega(1-y)}}{e^{-\omega}} \cdot \frac{e^{2\omega(1-y)}-1}{e^{2\omega}-1} = e^{\omega y}\frac{e^{2\omega(1-y)}-1}{e^{2\omega}-1} \xrightarrow[\omega\to-\infty]{} 0$$

Por otra parte, para cualquier $\omega \neq 0$, de (*2) se tiene $\hat{u}(\omega,0) = \hat{f}_1(\omega)$ y $\hat{u}(\omega,1) = \hat{f}_2(\omega)$, y estas funciones tienden a cero cuando $\omega \longrightarrow +\infty$ y cuando $\omega \longrightarrow -\infty$ (Lema de Riemann-Lebesgue).

Nota: Esta comprobación la hemos hecho para controlar nuestras cuentas y nuestra resolución, pues por el lema de Riemann-Lebesgue, debe verificarse que $\underset{\omega \to +\infty}{Lim} \hat{u}(\omega, y) = 0 = \underset{\omega \to -\infty}{Lim} \hat{u}(\omega, y)$. Este tipo de verificaciones las hacemos los que preparamos los enunciados y escribimos las resoluciones con detalle.

La solución buscada es, entonces:

$$u(x,y) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega, y) e^{i\omega x} d\omega = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{senh(\omega(1-y))\hat{f}_1(\omega) + senh(\omega y)\hat{f}_2(\omega)}{senh(\omega)} e^{i\omega x} d\omega \ .$$

EJERCICIO 4: Mostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x+x^3} dx = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} e^{-|x|} dx$ y obtener el valor de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)\cos(\alpha x)}{x} dx$ para todo *α*.

Resolución: La integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x+x^3} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(1+x^2)} dx$ converge absolutamente pues $\forall x \in \Re : \left|\frac{sen(x)}{x(1+x^2)}\right| = \overbrace{\left|\frac{sen(x)}{x}\right|}^{\leq 1} \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$. Ahora, sean $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ (como es habitual, se sobreentiende *f*(0) = 1) y $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, sabemos que $\hat{f}(\omega) = \pi 1_{[-1,1]}(\omega)$ y que $\hat{g}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$. Estas transformadas se han calculado en la práctica TP 8 (además, están en los apuntes subidos en la página de la materia) y también conocemos la identidad $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}d\omega$ (TP 8, ejercicio 13 y página 23 de los mencionados apuntes), válida para funciones de cuadrado integrable. En nuestro caso, $\left|f(x)\right|^2 = \dfrac{sen(x)^2}{x^2}$ y $\left|g(x)\right|^2 = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ son integrables y por lo tanto podemos deducir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x+x^3}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x(1+x^2)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{g(\omega)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \pi 1_{[-1,1]}(\omega)\pi e^{-|\omega|}d\omega = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{+1} e^{-|x|}dx$$

***Observación* 1**: Desde luego, se pueden calcular ambas integrales por separado y verificar que son iguales. El cálculo de la primera se puede realizar mediante una aplicación cuidadosa de integración compleja y residuos, mientras que la segunda es inmediata: $\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-|x|}dx = \int_{0}^{1} e^{-x}dx = -(e^{-1}-1) = 1-\dfrac{1}{e}$.

Para el cálculo de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)\cos(\alpha x)}{x}dx$ podemos utilizar $\hat{f}(\omega) = \pi 1_{[-1,1]}(\omega)$, es decir: $\displaystyle (vp)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)e^{-i\omega x}}{x}dx = \pi 1_{[-1,1]}(\omega)$. Separando parte real e imaginaria del primer miembro obtenemos

$$(vp)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)\cos(\omega x)}{x}dx - i\overbrace{(vp)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)sen(\omega x)}{x}dx}^{=0} = \pi 1_{[-1,1]}(\omega) .$$

El segundo término del primer miembro se anula pues el integrando es impar. Por lo tanto, para todo α:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)\cos(\alpha x)}{x}dx = \pi 1_{[-1,1]}(\alpha)$$

***Observación* 2**: La notación $1_{[-1,1]}$ que hemos utilizado es para la función

$$1_{[-1,1]}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t|<1 \\ 0 & si \quad |t|>1 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad |t|=1 \end{cases}$$

EJERCICIO 5: Hallar $f:[0,+\infty)\longrightarrow\Re$ tal que para todo $t\geq 0$:

$$f(t)+\int_0^t f(\tau)d\tau = H(t)-H(t-1)$$

señalando claramente las propiedades que utiliza e indicando las hipótesis bajo las cuales son válidas.

Resolución: Asumiendo que f es una función objeto (seccionalmente continua y de orden exponencial), el segundo término del primer miembro de la ecuación es la convolución $(f*H)(t)$. Por lo tanto, aplicando la transformación de Laplace en ambos miembros y utilizando el teorema de convolución obtenemos $F(s)+F(s)\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}$, donde F es la transformada de Laplace de f. La identidad es válida para Re(s) > 0. Despejando obtenemos $F(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{e^{-s}}{s+1}$, que es la transformada de Laplace de $e^{-t}H(t)-e^{-(t-1)}H(t-1)$. Por el teorema de Lerch, esta es la casi-única solución de la ecuación.

Respuesta: $f(t)=e^{-t}H(t)-e^{-(t-1)}H(t-1)$

Verificación:

(a) Para $0<t<1$:

$$f(t)+\int_0^t f(\tau)d\tau = e^{-t}H(t)-e^{-(t-1)}H(t-1)+\int_0^t [e^{-\tau}H(\tau)-e^{-(\tau-1)}H(\tau-1)]d\tau =$$

$$= e^{-t}+\int_0^t e^{-\tau}d\tau = e^{-t}+(-e^{-t}+1)=1\overset{0<t<1}{=}H(t)-H(t-1)$$

(b) Para $t>1$:

$$f(t)+\int_0^t f(\tau)d\tau = e^{-t}H(t)-e^{-(t-1)}H(t-1)+\int_0^t [e^{-\tau}H(\tau)-e^{-(\tau-1)}H(\tau-1)]d\tau =$$

$$= e^{-t}-e^{-(t-1)}+\int_0^t e^{-\tau}d\tau-\int_1^t e^{-(\tau-1)}d\tau = e^{-t}-e^{-(t-1)}+(-e^{-t}+1)-(-e^{-(t-1)}+1)=0$$

$$\overset{t>1}{=} H(t)-H(t-1)$$
